Cálculo II – 2020/2021

Aula 24
1/2

Planificação **Aula 24** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 08/06, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 85 a 92 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Recordar: A solução de uma EDO linear completa é:

$$y = y_H + y_p$$

y_H → Aula 23

y_p → dois métodos de resolução
- Método dos coeficientes indeterminados (Aula 24)
- Método da variação das constantes (Aula 25)

Slides 42 e 43

Cálculo de y_p usando o método dos coeficientes indeterminados

Este método só se pode usar se:

- a EDO for de coeficientes constantes: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$
- $b(x)$ tem de ser da forma: $b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ou $b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$, onde $P_m(x)$ é um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Nestas condições tem-se que

$$\boxed{y_p = x^k e^{\alpha x} \left[P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \operatorname{sen}(\beta x) \right]}$$

onde:
- $k \in \mathbb{N}$ é a multiplicidade de $r = \alpha + \beta i$ se esta for raiz do polinómio característico; caso contrário, $k = 0$
- $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios de grau m genéricos com coeficientes a determinar substituindo y_p e as suas derivadas na EDO completa

Exercício 1: Determinar a solução geral das seguintes EDOs:

a) $y''' + y' = \operatorname{sen} x$

b) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

c) $y' + 2y = x^2 e^{-2x}$

$\boxed{\text{Slide 44}}$ **Princípio da sobreposição dos efeitos**

Teorema: Se y_{p_1} é uma solução particular da EDO

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\,y = b_1(x)$$

e y_{p_2} é uma solução particular da EDO

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\,y = b_2(x)$$

então $y_{p_1} + y_{p_2}$ é uma solução particular da EDO

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\,y = b_1(x) + b_2(x)$$

Exercício 2: Determinar a solução geral da EDO

$$y'' - 3y' = e^{3x} + x^2 - 2$$

TPCs: Folha prática 4: 19 (exceto o f)); 21

2.º teste, 13/06/18 → Ex. 4

Ex. Recurso, 02/07/18 → Ex. 6c)

2.º teste, 22/06/17 → Ex. 1

Ex. Recurso, 10/07/17 → Ex. 4b)

Aula 24

1) a) $y''' + y' = \text{sen}\,x$ Objetivo: Determinar a solução geral: $y = y_H + y_P$

1ª Etapa: Determinar y_H (como na última aula)

EDO linear homogénea associada: $y''' + y' = 0$

1º Passo: $r^3 + r = 0 \Leftrightarrow r(r^2+1) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r^2 = -1 \Leftrightarrow \boxed{r = 0 \vee r = i \vee r = -i}$

2º Passo: $S.F.S. = \{e^{0x}, e^{0x}\cos(1x)\} = \{1, \cos x, \text{sen}\,x\}$

3º Passo: $\boxed{y_H = C_1 + C_2\cos x + C_3\,\text{sen}\,x,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}}$

2ª Etapa: Determinar y_P (usando o Método dos Coeficientes Indeterminados)

1º Passo: Comparar $b(x)$ com $b(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ (onde $P_m(x)$ é um polinómio de grau m)

ou $b(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\,\text{sen}(\beta x)$

e determinar $\boxed{\alpha, \beta \text{ e } m}$

$b(x) = \text{sen}\,x \rightsquigarrow$ $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $m = 0$

Nota: $\underbrace{P_m(x) = 1}_{\text{grau zero}}$

2º Passo: Determinar $\boxed{K}$

Escrever $r = \alpha + \beta i$ →
- Se r for raiz da equação característica então K é a sua multiplicidade
- S r não for raiz então $K = 0$

$\left.\begin{matrix}\alpha = 0\\ \beta = 1\end{matrix}\right\} r = 0 + 1i \Leftrightarrow \boxed{r = i} \rightsquigarrow \boxed{K = 1}$

3º Passo: Tendo em conta os valores de α, β, m e K anteriores, escrever:

$$y_P = x^K e^{\alpha x}[P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\,\text{sen}(\beta x)]$$

Nota:
$m = 0 \longrightarrow P(x) = p_0$; $Q(x) = q_0$
$m = 1 \longrightarrow P(x) = p_0 + p_1x$; $Q(x) = q_0 + q_1x$
$m = 2 \longrightarrow P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2$; $Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2$
etc..., com $p_i, q_i \in \mathbb{R}$

$\alpha=0;\ \beta=1;\ m=0;\ k=1$

Então

$$y_p = x^1 e^{0x}\left[p_0\cos(1x)+q_0\,\text{sen}(1x)\right] \qquad e^{0x}=1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_p = x\,p_0\cos x + x\,q_0\,\text{sen}x}$$

4º Passo: Substituir y_p e as suas derivadas na EDO completa para determinar os coeficientes dos polinómios $P(x)$ e $Q(x)$

$$y'''_p + y'_p = \text{sen}x$$

C. aux. $y'_p = (x\,p_0\cos x + x\,q_0\,\text{sen}x)' = p_0\cos x + x\,p_0(-\text{sen}x) + q_0\,\text{sen}x + x\,q_0\cos x$

$$= (p_0 + x q_0)\cos x + (q_0 - x p_0)\,\text{sen}x$$

$$y''_p \overset{\text{T.P.C.}}{=} \dots$$

$$y'''_p \overset{\text{T.P.C.}}{=} \dots = (-3p_0 - x q_0)\cos x + (-3x q_0 + x p_0)\,\text{sen}x$$

$$\underbrace{(-3p_0 - x q_0)\cos x + (-3x q_0 + x p_0)\,\text{sen}x}_{y'''_p} + \underbrace{(p_0 + q_0)\cos x + (q_0 - x p_0)\,\text{sen}x}_{y'_p} = \text{sen}x$$

$$\Leftrightarrow (-3p_0 - \cancel{x q_0} + p_0 + \cancel{x q_0})\cos x + (-3\,q_0 + \cancel{x p_0} + q_0 - \cancel{x p_0})\,\text{sen}x = \text{sen}x$$

$$\Leftrightarrow -2p_0\cos x - 2q_0\,\text{sen}x = \text{sen}x \Leftrightarrow \begin{cases}-2p_0 = 0\\ -2q_0 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p_0 = 0\\ q_0 = -\frac{1}{2}\end{cases}$$

Logo, $\boxed{y_p = -\frac{1}{2}x\,\text{sen}x}$

3ª Etapa: Finalmente, a solução geral é $y = y_H + y_p$

$$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\,\text{sen}x - \frac{1}{2}x\,\text{sen}x,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

b) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x} \longrightarrow b(x)$

1ª Etapa: EDO linear homogénea associada: $2y'' - 4y' - 6y = 0$

1º Passo: $2r^2 - 4r - 6 = 0 \Leftrightarrow \underset{\text{TPC}}{\dots} \Leftrightarrow \boxed{r=-1 \lor r=3}$

2º Passo: $S.F.S. = \{e^{-x};\ e^{3x}\}$

3º Passo: $\boxed{y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

2ª Etapa: 1º Passo: $b(x) = 3e^{2x} \rightsquigarrow \alpha = 2;\ \beta = 0;\ m = 0$

2º Passo: $r = \alpha + \beta i \Leftrightarrow \boxed{r=2} \rightsquigarrow k=0 \longrightarrow$ pois $r=2$ não é solução do 1º passo, 1ª etapa.

3° Passo: $y_p = x^0 e^{2x}[P_0 \underbrace{\cos(0x)}_{=1} + q_0 \underbrace{\operatorname{sen}(0x)}_{=0}] \Leftrightarrow y_p = P_0 e^{2x}$ ($x^0 \to =1$)

4° Passo: $2y''_p - 4y'_p - 6y_p = 3e^{2x}$ C. aux $y'_p = 2P_0 e^{2x}$; $y'' = 4P_0 e^{2x}$

$\Leftrightarrow 2 \times 4 P_0 e^{2x} - 4 \times 2 P_0 e^{2x} - 6P_0 e^{2x} = 3e^{2x}$

$\Leftrightarrow -6P_0 e^{2x} = 3e^{2x} \Leftrightarrow -6P_3 = 3 \Leftrightarrow P_0 = -\frac{3}{6} \Leftrightarrow P_0 = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Logo } y_p = -\frac{1}{2}e^{2x}}$

3^a Etapa: $y = y_H + y_p \Leftrightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) $y' + 2y = x^2 e^{-2x}$ $b(x)$

Nota: Como é uma EDO linear de 1^a ordem podiam usar o T.P.C. método da aula 20 → mais rápido mas têm de calcular integrais

1^a Etapa: EDO linear homogénea associada: $y' + 2y = 0$

1°) $r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2$ 2°) S.F.S. $= \{e^{-2x}\}$ 3° $y_H = c_1 e^{-2x}, c_1 \in \mathbb{R}$

2^a Etapa: 1°) $b(x) = x^2 e^{-2x} \rightsquigarrow \alpha = -2; \beta = 0; m = 2$

2°) $r = \alpha + \beta i \Leftrightarrow \boxed{r = -2} \rightsquigarrow k = 1$

3°) $y_p = x^1 e^{-2x}[P(x) \underbrace{\cos(0x)}_{=1} + Q(x) \underbrace{\operatorname{sen}(0x)}_{=0}]$

$\Leftrightarrow y_p = xe^{-2x}(P_0 + P_1 x + P_2 x^2) \Leftrightarrow \boxed{y_p = e^{-2x}(P_0 x + P_1 x^2 + P_2 x^3)}$

4°) $y'_p + 2y_p = x^2 e^{-2x}$ C. aux. $y'_p = -2e^{-2x}(P_0 x + P_1 x^2 + P_2 x^3) + e^{-2x}(P_0 + 2P_1 x + 3P_2 x^2)$

$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{-2e^{-2x}(P_0 x + P_1 x^2 + P_2 x^3)} + e^{-2x}(P_0 + 2P_1 x + 3P_2 x^2)}_{y'_p} + \cancel{2x}\underbrace{\cancel{e^{-2x}(P_0 x + P_1 x^2 + P_2 x^3)}}_{y_p} = x^2 e^{-2x}$

$\Leftrightarrow \cancel{e^{-2x}}(P_0 + 2P_1 x + 3P_2 x^2) = x^2 \cancel{e^{-2x}} \Leftrightarrow P_0 + 2P_1 x + 3P_2 x^2 = x^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P_0 = 0 \\ 2P_1 = 0 \\ 3P_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_0 = 0 \\ P_1 = 0 \\ P_2 = 1/3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Logo}} y_p = e^{-2x}(0 + 0 + \frac{1}{3}x^3) \Leftrightarrow y_p = \frac{1}{3}x^3 e^{-2x}$

3^a Etapa: $y = y_H + y_p \Leftrightarrow y = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{3}x^3 e^{-2x}, c_1 \in \mathbb{R}$

2) $y'' - 3y' = \underbrace{e^{3x}}_{b_1(x)} + \underbrace{x^2 - 2}_{b_2(x)}$

1^a Etapa: Calcular y_H EDO linear homogénea associada: $y'' - 3y' = 0$

1°) $r^2 - 3r = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow r = 0 \vee r = 3$ 2°) … 3°) $\boxed{y_H = c_1 + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

2ª Etapa: Calcular y_{p_1} (usando $b_1(x)$)

1º) $b_1(x) = e^{3x} \rightsquigarrow \alpha = 3;\ \beta = 0;\ m = 0$

2º) $r = \alpha + \beta i \Leftrightarrow \boxed{r = 3} \rightsquigarrow K = 1$

3º) … $y_{p_1} = p_0 x e^{3x} \overset{4º}{\rightsquigarrow} \dots$ $\boxed{y_{p_1} = \frac{1}{3} x e^{3x}}$

3ª Etapa: Calcular y_{p_2} (usando $b_2(x)$)

1º) $b_2(x) = x^2 - 2 \rightsquigarrow \alpha = 0;\ \beta = 0;\ m = 2$

2º) $r = \alpha + \beta i \Leftrightarrow \boxed{r = 0} \rightsquigarrow K = 1$

3º) … $y_{p_2} = p_0 x + p_1 x^2 + p_2 x^3 \overset{4º}{\rightsquigarrow} \dots$ $\boxed{y_{p_2} = \frac{16x}{27} - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x^3}$

4ª Etapa: A solução geral é $y = y_H + y_{p_1} + y_{p_2}$

Então $y = y_H + y_{p_1} + y_{p_2} \Leftrightarrow y = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3} x e^{3x} + \frac{16}{27}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x^3,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$